

1. Дан эллипс, заданный каноническим уравнением. Точка $A(1, 3)$ лежит на этом эллипсе.
Координаты правого фокуса эллипса: $(\sqrt{6.4}, 0)$.

(к) Найдите уравнение этого эллипса.

Точка B – точка пересечения этого эллипса с положительной полуосью x .

Через точку A провели прямую, проходящую через начало координат, точку O .

Точка C – произвольная точка на прямой AO . Точка P – середина отрезка BC .

(а) Найдите геометрическое место всех точек P .

(б) Найдите уравнение окружности, которая касается найденного вами геометрического места и касается прямой AO в точке O .

решение :

$$\times \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ c^2 = a^2 - b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1^2}{a^2} + \frac{3^2}{b^2} = 1 \\ a^2 - b^2 = \frac{32}{5} \end{cases} \Rightarrow b^2 = 9.6, a^2 = 16 \Rightarrow b = 4\sqrt{\frac{3}{5}}, a = 4 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9.6} = 1}$$

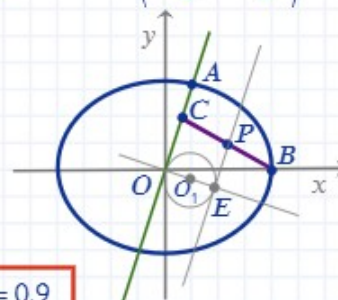
$$\rightarrow B(4, 0), \text{ прямая } OA : y = 3x \Rightarrow C(x_C, 3x_C) \Rightarrow x_P = \frac{x_C + x_B}{2}, y_P = \frac{y_C + y_B}{2} \Rightarrow P\left(\frac{x_C + 4}{2}, \frac{3x_C}{2}\right) \Rightarrow$$

$$P(x, 3x - 6) \Rightarrow P \text{ лежит на прямой } \boxed{y = 3x - 6}$$

$$\rightarrow y_{\perp} = -\frac{1}{3}x \text{ пересекает прямую } y = 3x - 6 \text{ в точке } E\left(\frac{9}{5}, -\frac{3}{5}\right) \Rightarrow$$

$$|OE| = \sqrt{\left(\frac{9}{5}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

$$R = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OE} \Rightarrow O_1\left(\frac{9}{10}, -\frac{3}{10}\right) \Rightarrow \boxed{(x - 0.9)^2 + (y + 0.3)^2 = 0.9}$$



2. На чертеже справа представлен прямоугольный параллелепипед $ABCD A' B' C' D'$.

Известно, что плоскость $A' B' C' D'$ задана уравнением $x + 4y - 8z - 142 = 0$ и что $B(0, 7, 6)$.

(к) Найдите длину ребра BB' .

Известно, что параметрическое представление прямой AB имеет вид $\underline{x} = (0, 7, 6) + t(0, 2, 1)$.

Длина ребра AB равна $5\sqrt{5}$, а координата y вершины A отрицательная.

(а) Найдите координаты вершины A .

(б) Найдите уравнение плоскости $ABB'A'$.

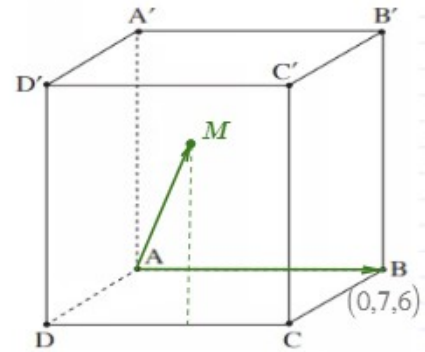
Дана точка $M(k, 1, 3)$, k – положительный параметр.

Известно, что угол между прямой AB и прямой AM равен 60° .

(г) Найдите значение k (в ответе можно оставить знак корня).

Известно, что точка M лежит в плоскости $DCC'D'$.

(н) Найдите объем данного прямоугольного параллелепипеда.



решение :

$$\text{к } |BB'| = d_B = \frac{|1 \cdot 0 + 4 \cdot 7 - 8 \cdot 6 - 142|}{\sqrt{1^2 + 4^2 + 8^2}} = \frac{162}{9} = 18 \quad |BB'| = 18$$

$$\text{б } \vec{BA} = t \cdot (0, 2, 1), |AB| = |t| \sqrt{2^2 + 1^2} = |t| \sqrt{5} = 5\sqrt{5} \Rightarrow t = \pm 5 \Rightarrow \vec{OA} = (0, 7, 6) \pm 5(0, 2, 1)$$

$$y_A < 0 \Rightarrow A(0, -3, 1)$$

$$\text{а } A(0, -3, 1), B(0, 7, 6) \in \text{плоскости } ABB'A' : Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow \begin{cases} -3B + C + D = 0 \\ 7B + 6C + D = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$10B + 5C = 0 \Rightarrow B = 1, C = -2, D = 5 \Rightarrow ABB'A' : Ax + y - 2z + 5 = 0$$

$$\vec{n}_{ABCD}(1, 4, -8), \vec{n}_{ABB'A'}(A, 1, -2), \vec{n}_{ABB'A'} \perp \vec{n}_{ABCD} \Rightarrow \vec{n}_{ABB'A'} * \vec{n}_{ABCD} = 0 \Rightarrow$$

$$A * 1 + 1 * 4 + (-2) * (-8) = 0 \Rightarrow A = -20 \Rightarrow ABB'A' : 20x - y + 2z - 5 = 0$$

$$\text{г } \vec{AB}(0, 10, 5), \vec{AM}(k, 4, 2), \vec{AB} * \vec{AM} = |AB| * |AM| \cos \alpha \Rightarrow$$

$$0 * k + 10 * 4 + 5 * 2 = 50 = \sqrt{125} * \sqrt{k^2 + 20} * \frac{1}{2} \Rightarrow k^2 = 60, k > 0 \Rightarrow k = 2\sqrt{15}$$

$$\text{н } A(0, -3, 1), \vec{AM}(2\sqrt{15}, 4, 2) \Rightarrow M(2\sqrt{15}, 1, 3)$$

$$\text{расстояние от точки } M \text{ до плоскости } ABB'A' \quad |MM_1| = d_M = \frac{20 * 2\sqrt{15} - 1 + 2 * 3 - 5}{\sqrt{20^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{40\sqrt{3}}{9}$$

$$|AB| = 5\sqrt{5}, |BB_1| = 18$$

$$V = |AB| * |BB_1| * |MM_1| = 5\sqrt{5} * 18 * \frac{40\sqrt{3}}{9} = 400\sqrt{15} \Rightarrow V = 400\sqrt{15} = 1549,19$$

3. (к) Покажите, что геометрическое место всех точек $z = x + iy$ на гауссовой плоскости, для которых $|z - 2i| = \frac{z - \bar{z}}{2i} + 2$, является параболой, и найдите ее уравнение.

Дано комплексное число $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $0^\circ < \theta < 90^\circ$, $r > 0$.

Дан выпуклый многоугольник I, вершины которого соответствуют решениям уравнения

$$z^4 = \frac{1}{r^4} \cdot (\cos(4\theta) + i \sin(4\theta)), \quad z - \text{комплексная переменная.}$$

- (а) Выразите все числа, соответствующие вершинам многоугольника I, в полярной форме, при помощи r и θ .

Дан многоугольник II, вершины которого соответствуют числам $-\frac{1}{w}$, $\frac{1}{w}$, $-w$, w .

- (а) Выразите все числа, соответствующие вершинам многоугольника II, в полярной форме, при помощи r и θ .

Известно, что многоугольник II – ромб.

- (т) Найдите значение θ .

Известно, что точка, соответствующая w , принадлежит геометрическому месту, найденному вами в пункте (к).

- (н) Найдите отношение площади многоугольника II к площади многоугольника I.

решение :

$$\kappa \quad |z - 2i| = \frac{z - \bar{z}}{2i} + 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = \frac{2iy}{2i} + 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = y + 2 \Rightarrow$$

$$x^2 + (y - 2)^2 = (y + 2)^2 \Rightarrow \boxed{x^2 = 8y}$$

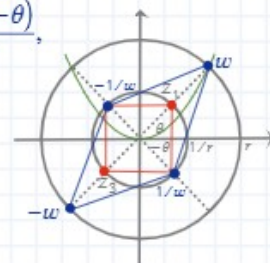
$$\kappa \quad z^4 * r^8 = w^4, \quad z = R \operatorname{cis}(\alpha) \Rightarrow R^4 * r^8 \operatorname{cis}(4\alpha) = r^4 \operatorname{cis}(4\theta) \Rightarrow R * r = 1, \quad 4\alpha = 4\theta + 2\pi k \Rightarrow$$

$$R = \frac{1}{r}, \quad \alpha = \theta + \frac{\pi k}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow \boxed{z_1 = \frac{1}{r} \operatorname{cis} \theta, \quad z_2 = \frac{1}{r} \operatorname{cis} \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right), \quad z_3 = \frac{1}{r} \operatorname{cis} (\theta + \pi), \quad z_4 = \frac{1}{r} \operatorname{cis} \left(\theta + \frac{3\pi}{2} \right)}$$

$$\lambda \quad w = r \operatorname{cis} \theta \Rightarrow -\frac{1}{w} = \frac{-\bar{w}}{r^2} = \frac{\operatorname{cis}(\pi) * r \operatorname{cis}(-\theta)}{r^2} = \frac{\operatorname{cis}(\pi - \theta)}{r}, \quad \frac{1}{w} = \frac{\bar{w}}{r^2} = \frac{r \operatorname{cis}(-\theta)}{r^2} = \frac{\operatorname{cis}(-\theta)}{r},$$

$$-w = \operatorname{cis}(\pi) * r \operatorname{cis}(\theta) = r \operatorname{cis}(\pi + \theta) \Rightarrow$$

$$\boxed{-\frac{1}{w} = \frac{1}{r} \operatorname{cis}(\pi - \theta), \quad \frac{1}{w} = \frac{1}{r} \operatorname{cis}(-\theta), \quad -w = r \operatorname{cis}(\pi + \theta), \quad w = r \operatorname{cis}(\theta)}$$



$$\tau \quad 2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{4}} \Rightarrow -\frac{1}{w} = \frac{1}{r} \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{4} \right), \quad \frac{1}{w} = \frac{1}{r} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4} \right), \quad -w = r \operatorname{cis} \left(\frac{5\pi}{4} \right) = r \operatorname{cis} \left(-\frac{3\pi}{4} \right), \quad w = r \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} \right)$$

$$\pi \quad z_1 = \frac{1}{r} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}, \quad z_2 = \frac{1}{r} \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{4} \right), \quad z_3 = \frac{1}{r} \operatorname{cis} \left(\frac{5\pi}{4} \right), \quad z_4 = \frac{1}{r} \operatorname{cis} \left(\frac{7\pi}{4} \right) \Rightarrow z_1 = \frac{w}{r^2}, \quad z_2 = -\frac{1}{w}, \quad z_3 = -\frac{w}{r^2}, \quad z_4 = \frac{1}{w}$$

$$w = r \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow x = r \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y = r \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x^2 = 8y \Rightarrow \frac{r^2}{2} = 8 * r \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow r = 8\sqrt{2}$$

$$S_{II} = \frac{1}{2} * 2r * \frac{2}{r} = 2, \quad S_I = \frac{1}{2} * \frac{2}{r} * \frac{2}{r} = \frac{2}{r^2} \Rightarrow \boxed{\frac{S_{II}}{S_I} = r^2 \Rightarrow 128}$$

4. $f'(x)$ – производная функции $f(x)$.

$g(x)$ – функция, заданная как $g(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$.

Функции $f(x)$, $f'(x)$ и $g(x)$ определены в области $x \neq 0$.

Известно, что функция $f(x)$ убывает в области $x > 0$ и в области $x < 0$

и что $f'(x) \neq 0$ во всей области определения.

(к) Запишите области положительных и отрицательных значений функции $g(x)$ (если таковые существуют). Обоснуйте свой ответ.

Известно, что $f(x) = \frac{1}{x}$.

(з) (1) Найдите уравнение асимптот функции $g(x)$, перпендикулярных осям координат.

(2) Найдите координаты точки экстремума функции $g(x)$ и определите ее тип.

(а) Начертите схематический график функции $g(x)$.

a – параметр, больший 1.

Известно, что площадь фигуры, ограниченной графиком функции $g(x)$, осью x и прямыми

$x = \frac{1}{\ln a}$ и $x = \frac{1}{\ln(4a)}$, равна 5.

(т) Найдите значение a .

решение :

$$\text{к} \quad f'(x) < 0, e^{f(x)} > 0 \Rightarrow \text{для } x \neq 0 \quad g(x) < 0$$

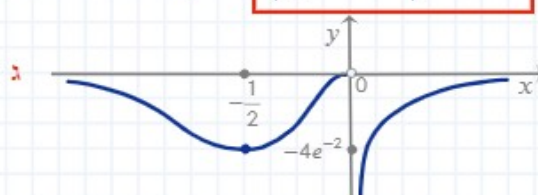
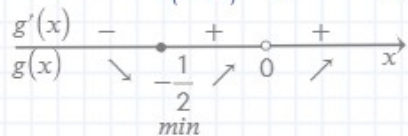
$$\text{з1)} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow g(x) = -e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$x \rightarrow 0_+ \Rightarrow g(x) \rightarrow -\infty \Rightarrow x = 0 \text{ – вертикальная асимптота}$$

$$x \rightarrow 0_- \Rightarrow g(x) \rightarrow -0 \cdot \infty \Rightarrow g(x) = \frac{-x^{-2}}{e^{\frac{1}{x}}} \rightarrow \frac{2x^{-3}}{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2x^{-1}}{e^{\frac{1}{x}}} \rightarrow \frac{-2x^{-2}}{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)} = -2e^{\frac{1}{x}} \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow g(x) \rightarrow 0_- \Rightarrow y = 0 \text{ – горизонтальная асимптота}$$

$$\text{з2)} \quad g'(x) = -e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{x^2} - e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-2}{x^3} = \frac{e^{\frac{1}{x}}(1+2x)}{x^4}, g(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}, -4e^{-2}\right) \text{ – min}$$



$$\text{т} \quad a > 1 \Rightarrow \ln(4a) > \ln(a) > 0 \Rightarrow \frac{1}{\ln(4a)} < \frac{1}{\ln(a)} \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{1}{\ln a}\right) = \ln(a), f\left(\frac{1}{\ln(4a)}\right) = \ln(4a)$$

$$S = - \int_{\frac{1}{\ln(4a)}}^{\frac{1}{\ln a}} e^{f(x)} f'(x) dx = - \int_{\ln(4a)}^{\ln a} e^f df = e^f \Big|_{\ln(4a)}^{\ln a} = 4a - a \Rightarrow S = 3a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{3}$$

5. Дана функция $f(x) = \frac{1}{x} \left(a + \frac{1}{(\ln x)^2} \right)$. a – положительный параметр.

(к) Найдите область определения функции $f(x)$.

Известно, что у функции $f(x)$ есть единственная точка экстремума, в которой $x = \frac{1}{e}$.

(д) Найдите значение a .

Подставьте $a = 1$ в функцию $f(x)$ и ответьте на вопросы пунктов (з)–(и).

$g(x)$ – это функция, для производной которой выполняется $g'(x) = f(x)$.

Область определения функции $g(x)$ совпадает с областью определения функции $f(x)$.

Известно, что у функции $g(x)$ есть точка перегиба, которая лежит на оси x .

(з) Найдите функцию $g(x)$, для которой выполняются эти условия.

Для найденной вами функции $g(x)$ ответьте на вопросы пунктов (т)–(и).

(т) (1) Найдите уравнения асимптот функции $g(x)$, перпендикулярных осям координат (если таковые существуют).

(2) Найдите координаты точек пересечения графика функции $g(x)$ с осью x .

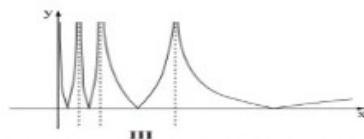
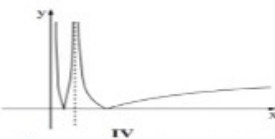
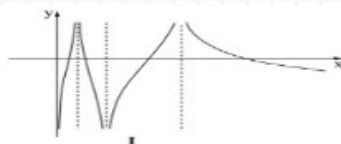
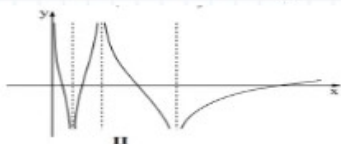
(3) Найдите области возрастания и убывания функции $g(x)$ (если таковые существуют).

(и) Начертите схематический график функции $g(x)$.

Дана функция $h(x) = \ln |g(x)|$.

(и) (1) Найдите область определения функции $h(x)$.

(2) Один из приведенных ниже графиков I–IV соответствует функции $h(x)$. Определите, какой из них, и обоснуйте свой ответ.



решение :

$$x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} \left(a + \frac{1}{\ln^2 x} \right) + \frac{1}{x} \cdot \frac{-2}{\ln^3 x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2} \left(a + \frac{1}{\ln^2 x} + \frac{2}{\ln^3 x} \right), f'(e^{-1}) = 0 \Rightarrow a + 1 - 2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$g(x) = \int \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{\ln^2 x} \right) dx = \int \left(1 + \frac{1}{\ln^2 x} \right) d(\ln x) = \ln x - \frac{1}{\ln x} + C$$

$$(e^{-1}, 0) - \text{точка перегиба } g(x) \Rightarrow -1 + 1 + C = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow g(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x}$$

$$1) x \rightarrow 1_+ \Rightarrow g(x) \rightarrow -\infty, x \rightarrow 1_- \Rightarrow g(x) \rightarrow \infty, x \rightarrow 0_+ \Rightarrow g(x) \rightarrow -\infty \Rightarrow$$

$$x = 0, x = 1 - \text{вертикальные асимптоты}$$

$$2) \ln x \neq 0, \ln^2 x - 1 = 0 \Rightarrow (\ln x - 1)(\ln x + 1) = 0 \Rightarrow (e, 0), (e^{-1}, 0)$$

$$3) f(x) = g'(x) = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{\ln^2 x} \right) > 0 \Rightarrow$$

$$g(x) \text{ возрастает при } x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$1) x \in (0, e^{-1}) \cup (e^{-1}, 1) \cup (1, e) \cup (e, +\infty)$$

$$2) |g(x)| = 1 \text{ в 4 точках, если } |g(x)| < 1 \Rightarrow h(x) < 0$$

$$\text{если } x \rightarrow e^{-1} \text{ или } x \rightarrow e \Rightarrow h(x) \rightarrow -\infty$$

$$\text{если } x \rightarrow 1 \Rightarrow h(x) \Rightarrow +\infty \Rightarrow \text{график II}$$

